

# ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В АСТРОНОМИИ И АСТРОФИЗИКЕ

**Д. А. Кононов**

*Институт астрономии РАН*

Эта лекция ориентирована преимущественно на студентов и имеет своей целью знакомство начинающих астрономов с обратными задачами наблюдательной астрономии и астрофизики. В лекции я расскажу, в чем заключается понятие обратной задачи, каковы особенности решения подобных задач, какие интересные и важные для науки результаты получаются в итоге. Также я приведу ряд иллюстративных примеров из различных областей астрономии и астрофизики.

## INVERSE PROBLEMS IN ASTRONOMY AND ASTROPHYSICS

**D. A. Kononov**

*Institute of Astronomy, Russian Academy of Sciences*

This review is intended to provide students with basic knowledge about inverse problems arising in observational astronomy and astrophysics. I am going to explain what inverse problems are, what difficulties we face when solving these problems, and what outstanding results we can obtain. In addition I am going to present a number of the most illustrative examples from various areas of astronomy and astrophysics.

## Введение

Обратными мы называем задачи, связанные с выяснением свойств объектов или причин явлений по их наблюдаемым следствиям. При этом обратные задачи возникают далеко не только в научно-технической сфере. В качестве иллюстративного примера обратной задачи, так сказать «из жизни», можно вспомнить, как сомелье по вкусу, цвету и запаху вина выясняет регион его происхождения, погодные условия в момент созревания винограда и даже растительное окружение, соседствовавшее с виноградниками.

В качестве примера научно-технической обратной задачи можно привести деконволюцию изображений (очистку изображения от влияния передаточной функции прибора), томографию в медицине, восстановление радиокарт в радиоастрономии, решение кривых блеска в фотометрии двойных звезд, доплеровскую томографию, применяемую для исследования газовых потоков в тесных двойных звездах.

С математической точки зрения обратную задачу можно определить следующим образом. Рассмотрим операторное уравнение вида

$$Ax = y,$$

где  $A$  — линейный оператор, действующий из гильбертова\* пространства  $X$  в гильбертово пространство  $Y$ ;  $x$  — искомое решение («объект»);  $y$  — заданная правая часть уравнения («изображение»). Решение обратной задачи есть отыскание неизвестного  $x$  при известном виде оператора  $A$  и известных (наблюдаемых) значениях  $y$ .

Решение обратных задач сопряжено с определенными трудностями, которые связаны с тем, что большинство таких практических задач являются некорректными. Для прояснения понятия корректности и некорректности задачи обратимся к критерию, предложенному французским математиком Ж. Адамаром. Согласно Адамару корректно поставленной считается задача, для которой выполняются следующие три условия:

- решение существует для любого  $y \in Y$ ;
- решение единственно;
- решение устойчиво, т. е. малым изменениям  $y$  соответствуют малые изменения  $x$ .

В наблюдательной астрономии нарушаются преимущественно второе и третье условия. Так, например, при восстановлении радиокарт мы сталкиваемся с тем, что количество данных (размерность вектора  $y$ ) значительно меньше размерности вектора искомого решения ( $x$ ). Это немедленно нарушает второе условие Адамара: в пределах неизвестных, «отсутствующих» данных итоговое решение можно варьировать как угодно, т. е. оно уже не является единственным. Нарушение третьего условия связано с тем, что в реальных наблюдательных данных практически всегда присутствует шум, который в определенных случаях может сделать решение задачи очень неустойчивым.

---

\* Гильбертовым пространством называется обобщение евклидова пространства на бесконечномерный случай.

Большое разнообразие обратных задач, а также трудности, связанные с их решением, породили развитие не только ряда отдельных математических методов, но и целого направления в математике. Целью данной лекции и является знакомство слушателя с некоторыми самыми иллюстративными примерами астрономических и астрофизических задач и методов их решения. Поскольку автор лекции занимается решением обратных задач, связанных с восстановлением астрономических изображений (доплеровская томография), основной акцент в лекции будет сделан именно на этих задачах. Однако будет уделено внимание и более широкому кругу задач.

## Исторический обзор

Как это ни странно, но с того момента, как люди начали решать первые астрономические обратные задачи, прошло значительно больше времени, чем можно себе представить. В работе [1] приведен иллюстративный пример одной из таких древних обратных задач. Речь идет о том, как древние греки, практически не имея под руками никакой сколь-нибудь серьезной математики, смогли по двумерным изображениям восстановить трехмерную форму объекта, т. е., говоря современным языком, решили томографическую задачу. А именно, наблюдая лунные затмения, они установили, что Земля имеет сферическую форму. Греки подметили, что лунные затмения наступают только в момент полнолуний и когда Солнце и Луна находятся в диаметрально противоположных точках небесной сферы. Из этого они сделали вывод, что затмения наступают, когда Земля заслоняет собой Луну от Солнца. Далее, они подметили, что в какой бы точке небесной сферы ни происходило затмение, земная тень всегда имеет круглую форму. Поскольку такую форму тени при любых углах проецирования может иметь только сфера, греки и сделали вывод, что Земля — это сферический объект.

Значительно позже, наблюдая одномерное движение Марса вдоль эклиптики, Кеплер смог восстановить двумерную форму его орбиты, а заодно, распространив полученные выводы на другие наблюдаемые в то время планеты, построил эмпирическую модель Солнечной системы, в которой планеты двигались по эллипсам, имеющим в одном из своих фокусов Солнце.

Приведенные выше примеры в строгом математическом смысле трудно назвать решением обратной задачи, поскольку они основаны не на обращении какого-либо уравнения, а на проверке заранее из-

вестных гипотез. Однако стоит отметить, что многие современные астрономические обратные задачи, имеющие строгую математическую постановку, основаны на некоторых гипотезах, пусть и значительно более сложных в математическом плане. В этом смысле можно сказать, что и древние греки, и Кеплер занимались обратными задачами, только они искали ответ не путем решения некоего математического уравнения, а путем перебора некоторых заранее известных решений.

Бурное развитие математических основ обратных задач началось в конце XIX — начале XX в. и связано с активными исследованиями в области функционального анализа, Фурье-анализа, теории операторов и интегральных уравнений. Ввиду сложности и обширности общих математических аспектов теории обратных задач, а также контекста лекции далее в этом разделе мы сосредоточим внимание на историческом обзоре наиболее значимых, с точки зрения автора, практических примеров и достижений. Тем более что одними из первых ученых, кто начал решать практические обратные задачи, были именно астрономы.

Так, например, одним из ныне часто используемых в обратных задачах преобразований является преобразование Радона [2] — интегральное преобразование, родственное преобразованию Фурье, которое, в частности, представляет собой основу для томографии. Впервые обращение этого преобразования в рамках решения практической задачи было выполнено именно в астрономии. Выполнил его выдающийся советский и армянский астроном В. А. Амбарцумян [3], решая задачу Эддингтона о восстановлении пространственных компонентов скоростей звезд по наблюдаемым лучевым. Стоит отметить, что при должном внимании упомянутая работа В. А. Амбарцумяна могла сыграть существенную роль не только в фундаментальной науке, но и в сугубо прикладных областях знания. Именно поэтому Алан Кормак, один из двух изобретателей медицинского томографа, получивший за свое изобретение Нобелевскую премию в 1964 г., упоминая работу Амбарцумяна в одной из своих статей, сказал, что если бы на нее обратили должное внимание, томограф мог бы появиться значительно раньше.

Всплеск активности в астрономических обратных задачах произошел в связи с появлением радиоастрономии. Технические особенности радиоастрономических наблюдений породили целый ряд методов восстановления изображений, среди которых многие затем эффективно переключались в другие области астрономии. В частности,

среди радиотелескопов присутствуют инструменты с так называемой веерной диаграммой направленности. Эти инструменты наблюдают не весь объект целиком, а «сканируют» его вдоль определенных направлений, и для получения двумерного изображения объекта необходимо использовать некий метод синтеза отдельных «сканов». Такой метод был предложен в 1967 г. Брэйсуэлом и Риддлом [4]. Их работа, среди прочего, интересна тем, что по сути предложенное решение есть также очередной способ обращения упомянутого выше преобразования Радона.

Следующим толчком к развитию эффективных методов восстановления изображений в радиоастрономии послужила острая проблема повышения пространственного разрешения, которая возникает ввиду значительно больших, в сравнении с оптикой, длин волн. Для иллюстрации всей глубины проблемы достаточно упомянуть, что для получения углового разрешения в  $1''$  на длине волны 21 см потребовалось бы построить телескоп с диаметром зеркала  $\sim 50$  км. В связи с этим для решения проблемы разрешения в радиоастрономии начал широко использоваться апертурный синтез (интерферометрия), который с необходимостью приводит к обратной задаче восстановления изображений по крайне разреженным данным. Здесь можно отметить работы Хегбома и Стира [5, 6], посвященные ныне широко используемому методу чистки (CLEAN), а также работы Нараяна и Нитьянанды [7], посвященные методу максимальной энтропии, который также пользуется большой популярностью в наши дни, и не только в радиоастрономии.

С развитием наблюдательных инструментов и теоретических методов возросла активность в исследовании более тусклых и далеких объектов, в частности, взаимодействующих двойных звезд. Предположения о том, что в этих объектах существуют сложные газодинамические структуры, были высказаны еще в первой половине XX в. (см., например, [8]). Наблюдательное исследование подобных объектов сопряжено с немалыми трудностями, поскольку зачастую приходится анализировать быстропеременные и, если так можно выразиться, одномерные данные — кривые блеска и спектры, чтобы сделать заключение о трехмерной картине течения. В подавляющем большинстве случаев для взаимодействующих двойных звезд никакой речи о прямых наблюдениях картины течения быть не может ввиду малости их размеров или удаленности от Солнца. В контексте обсуждения достижений в решении данного типа задач необходимо отметить работы, выполненные в Московском государственном уни-

верситете (см., например, [9]). Также в наблюдательных исследованиях взаимодействующих двойных звезд начиная с 1985—1988 гг., удалось добиться значительного прогресса в связи с изобретением таких методов исследования, как затменное картирование и доплеровская томография [10, 11]. Оба метода путем решения обратных задач позволяют восстановить двумерную картину течения. Изначально эти методы были созданы для исследования катаклизмических переменных звезд, но в настоящее время находят применение и в отношении других «родственных» им двойных.

До сих пор мы говорили преимущественно об обратных задачах, так или иначе связанных с восстановлением изображений астрономических объектов. Однако спектр астрономических обратных задач, поставленных и решенных к сегодняшнему дню, несравненно шире. К сожалению, уместить их все в формат лекции не представляется возможным. Для ознакомления с некоторыми из неупомянутых задач можно обратиться к уже процитированной работе [1].

## Современные результаты

При обсуждении современных достижений в решении астрономических обратных задач, связанных с восстановлением изображений, картированием астрономических объектов, необходимо отметить, что эти достижения теперь относятся скорее не к разработке новых математических методов, а к введению в строй новых, более совершенных инструментов и более эффективному использованию имеющегося математического аппарата (см., например, [12]).

Ввиду ограниченного объема лекции не представляется возможным перечислить все новые (полученные в последние два десятилетия) результаты. Поэтому в данном разделе я остановлюсь на самых, по моему мнению, иллюстративных достижениях. Без преувеличения, среди результатов, достойных упоминания, можно назвать те, которые получены с помощью инструмента ALMA (Atacama Large Millimeter/Submillimeter Array). Введение в строй ALMA, который представляет собой антенную решетку и работает на принципе апертурного синтеза, среди прочего позволило получить беспрецедентные изображения протопланетных дисков вокруг молодых звезд. В частности, одним из наиболее иллюстративных примеров достижений ALMA является картирование протопланетного диска вокруг звезды HL Tau (<https://www.eso.org/public/news/eso1436/\#2>, [13, 14]). Результаты этих работ позволили увидеть не только сам

диск, но и структуры в нем (кольца и пустоты), которые, как предполагают авторы, связаны с рождением планет, а также оценить параметры магнитного поля и его взаимодействие с веществом в системе звезда—диск.

Также среди достижений радиоастрономии я бы отметил запуск космического аппарата «Радиоастрон» и его достижения в качестве плеча интерферометра со сверхдлинной базой. Столь беспрецедентная длина базы позволяет получать беспрецедентное пространственное разрешение (см., например, [15, 16]).

Говоря об инструментах и достижениях в картировании всевозможных астрономических объектов, также можно отметить работы, выполненные с инструментом VLTI, который представляет собой инфракрасный интерферометр. Спектр задач решаемых с помощью этого инструмента, простирается от исследования молодых звезд и экстрасолнечных планет до пространственно разрешенных изображений активных галактических ядер и микролинзированных изображений (см., например, <https://www.eso.org/sci/facilities/paranal/telescopes/vlti/science.html>, [17, 18]). В контексте обсуждения инструмента VLTI, кстати, интересно отметить, что, ввиду очень слабого заполнения UV-плоскости, при восстановлении структуры некоторых объектов используются нестандартные методы восстановления изображений. А именно, для восстановления применяется комбинация прямого и обратного методов, т. е. наблюдаемые на интерферометре величины (функции видности) моделируются на основании некоторых предположений об объекте исследования и сравниваются с полученными реальными функциями видности.

Конечно, когда речь идет об обратных задачах, связанных с восстановлением изображений, я не могу обойти вниманием доплеровскую томографию. Нужно признать, что в настоящее время исследование объектов, для которых изначально была придумана доплеровская томография, значительно уступает по популярности тем же протопланетным дискам и исследованиям галактик, упомянутым выше. Однако в самой этой области до сих пор остается масса нерешенных интереснейших физических вопросов, а доплеровская томография — даже с использованием инструментов средних размеров — позволяет получить изображения структуры течения в объектах, прямые наблюдения которых не под силу даже самым большим и совершенным инструментам. В частности, в лекции я упомяну последние достижения в исследовании самых внутренних областей ак-

креционных дисков в катаклизмических переменных звездах, а также представлю результаты совместной с коллегами из УрФУ работы, в которой впервые получено изображение структуры течения в массивной взаимодействующей двойной системе UU Cas.

Помимо самых иллюстративных примеров, каждому из которых мы уделим определенное внимание, в данном разделе я приведу дайджест результатов работ по затменному картированию катаклизмических переменных звезд, пятенному картированию и еще некоторым методам.

## Заключение

Лекция посвящена обратным задачам, которые весьма распространены в наблюдательной астрономии. Представлен исторический обзор развития некоторых методов решения астрономических обратных задач и некоторые современные достижения интерферометрии и картирования. Ввиду личных научных интересов автора основной акцент сделан на задачах, связанных с получением и восстановлением изображений астрономических объектов. Лекция может быть полезна студентам младших и средних курсов для ознакомления с определенными классами задач, решаемыми в современной астрономии.

## Библиографические ссылки

1. *Lucy L. B.* Astronomical Inverse Problems // Reviews in Modern Astronomy / ed. by G. Klare : Reviews in Modern Astronomy. — 1994. — Vol. 7. — P. 31–50.
2. *Radon J.* Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. — 1917. — Vol. 69. — P. 262–277.
3. *Ambarzumian V.* On the derivation of the frequently function, of space velocities of the stars from the observed radial velocities // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 1936. — Vol. 96. — P. 172.
4. *Bracewell R. N., Riddle A. C.* Inversion of Fan-Beam Scans in Radio Astronomy // Astrophys. J. — 1967. — Vol. 150. — P. 427.
5. *Högbom J. A.* Aperture Synthesis with a Non-Regular Distribution of Interferometer Baselines // Astron. and Astrophys. Suppl. Ser. — 1974. — Vol. 15. — P. 417.



6. *Steer D. G., Dewdney P. E., Ito M. R.* Enhancements to the deconvolution algorithm 'CLEAN' // *Astron. Astrophys.* — 1984. — Vol. 137. — P. 159–165.
7. *Narayan R., Nityananda R.* Maximum entropy image restoration in astronomy // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* — 1986. — Vol. 24. — P. 127–170.
8. *Struve O.* The Spectrum of  $\beta$  Lyrae. // *Astrophys. J.* — 1941. — Vol. 93. — P. 104.
9. *Goncharskii A. V., Cherepashchuk A. M., Iagola A. G.* Numerical methods of solving inverse problems of astrophysics // *Moscow Izdatel Nauka.* — 1978.
10. *Horne K.* Images of accretion discs. I — The eclipse mapping method // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1985. — Vol. 213. — P. 129–141.
11. *Marsh T. R., Horne K.* Images of accretion discs. II - Doppler tomography // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* — 1988. — Vol. 235. — P. 269–286.
12. *Cai X., Pratley L., McEwen J. D.* Online radio interferometric imaging: assimilating and discarding visibilities on arrival // *ArXiv e-prints.* — 2017. 1712.04462.
13. *ALMA Partnership, Brogan C. L., Pérez L. M. et al.* The 2014 ALMA Long Baseline Campaign: First Results from High Angular Resolution Observations toward the HL Tau Region // *Astrophys. J. Lett.* — 2015. — Vol. 808. — P. L3. 1503.02649.
14. *Hasegawa Y., Okuzumi S., Flock M., Turner N. J.* Magnetically Induced Disk Winds and Transport in the HL Tau Disk // *Astrophys. J.* — 2017. — Vol. 845. — P. 31. 1706.09565.
15. *Gomez J. L., Lobanov A., Kovalev Y. et al.* RadioAstron Polarization KSP: Probing the innermost regions of blazar jets at tens of microarcseconds resolution // 42nd COSPAR Scientific Assembly : COSPAR Meeting. — 2018. — Vol. 42. — P. E1.8–3–18.
16. *Savolainen T.* RadioAstron imaging of nearby radio galaxies // 42nd COSPAR Scientific Assembly : COSPAR Meeting. — 2018. — Vol. 42. — P. E1.8–4–18.
17. *Gravity Collaboration, Sanchez-Bermudez J., Weigelt G. et al.* GRAVITY chromatic imaging of  $\eta$  Car's core. Milliarcsecond resolution imaging of the wind-wind collision zone (Br $\gamma$ , He I) // *Astron. Astrophys.* — 2018. — Vol. 618. — P. A125.
18. *Dong S., Mérand A., Delplancke-Ströbele F. et al.* First Resolution of Microlensed Images // *ArXiv e-prints.* — 2018. 1809.08243.